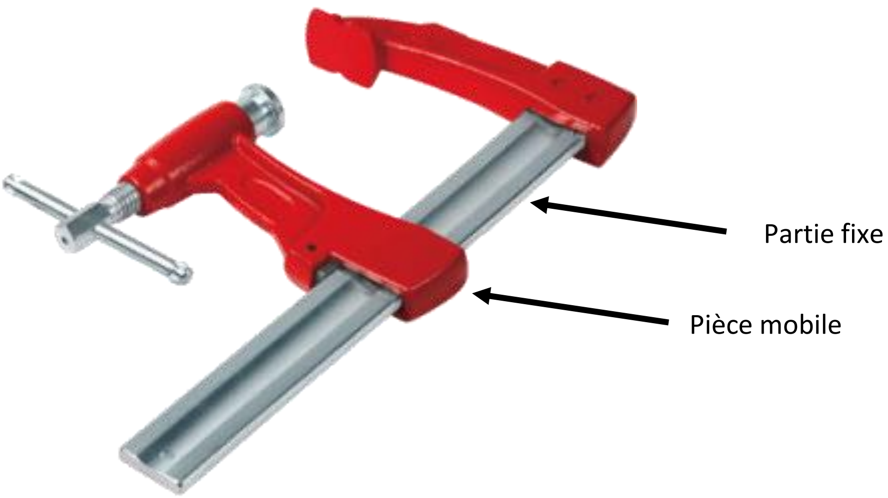
Exercice 1: Arc-boutement

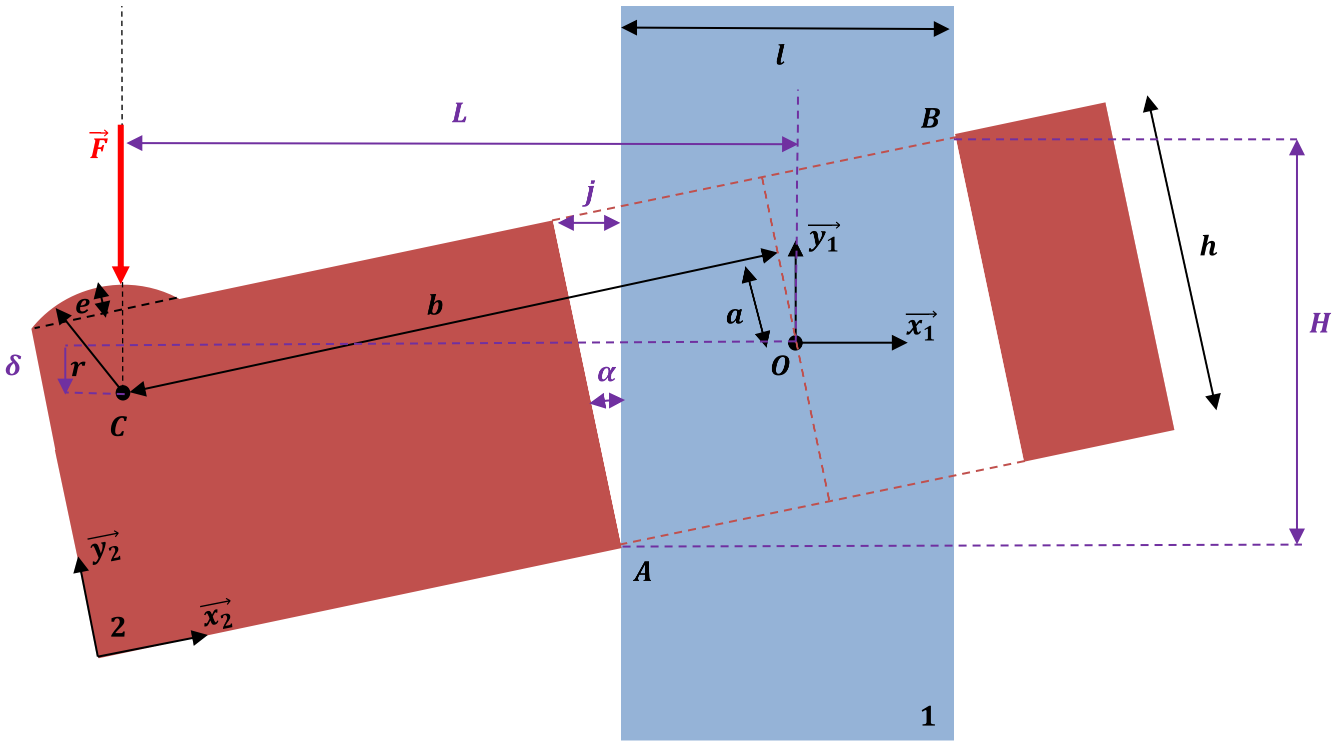
Notre étude porte sur un serre joint dont la photo est proposée ci-dessous :



Le serre joint est un système mécanique composé de deux pièces en liaison glissière l'une par rapport à l'autre. Lorsque la pièce mobile ne serre pas d'objet, elle est libre en translation et on peut remarquer qu'il existe un jeu visible dans la liaison glissière avec la partie fixe. Par contre, lorsque le serre joint est utilisé pour serrer une pièce, la liaison glissière se transforme en une liaison encastrement.

Demandons-nous jusqu'à quel effort cette liaison empêche la translation.

On propose le modèle plan suivant, dans lequel le jeu a volontairement été accentué :



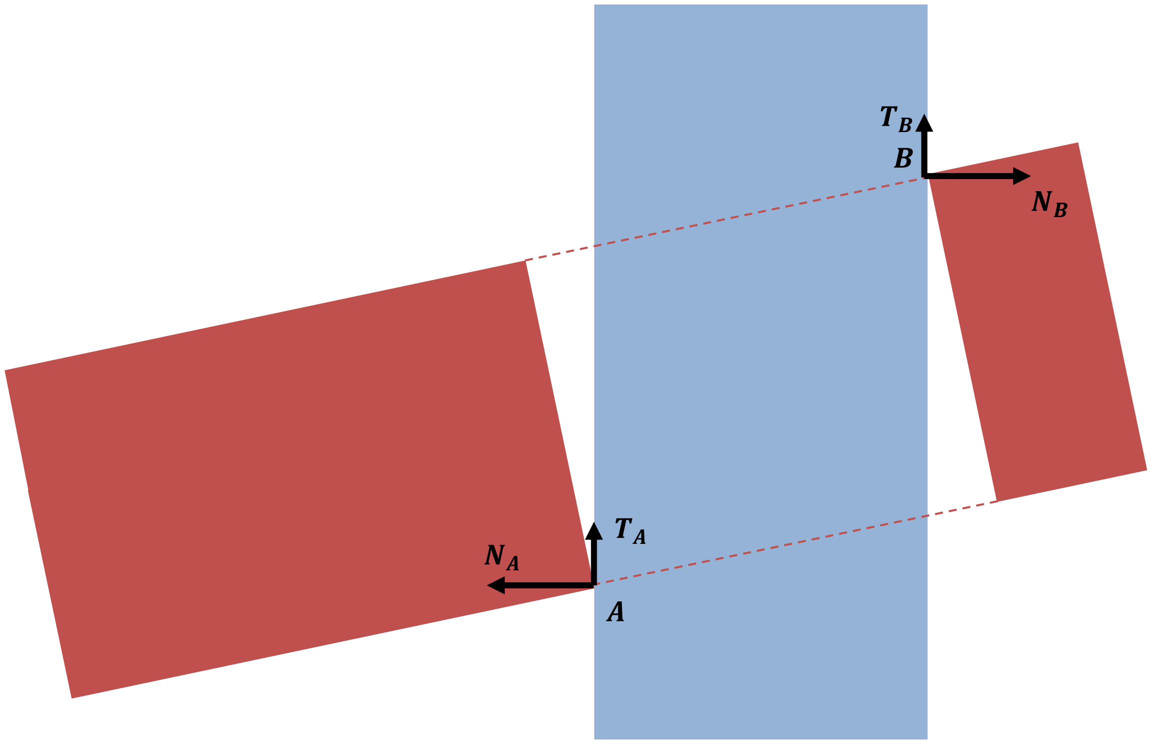
Equations du PFS appliqué à la pièce 2

Question 1: Isoler la pièce mobile 2 et énumérer les actions extérieures qui s'appliquent dessus

Les actions sont :

- Effort de serrage
- Contact en A
- Contact en B

Question 2: Représenter sur le schéma ci-dessous les actions normales et tangentielles N_A, T_A, N_B, T_B aux contacts en A et B qui s'appliquent sur 2



Question 3: Donner l'expression des torseurs $\{T_A\}$ en A, $\{T_B\}$ en B, dans $\mathfrak{B}_1$ des actions de contact en A et B qui s'appliquent sur 2 en considérant que N_A, T_A, N_B, T_B sont des réels positifs

$$\{T_A\} = \begin{Bmatrix} -N_A & 0 \\ T_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1} \quad ; \quad \{T_B\} = \begin{Bmatrix} N_B & 0 \\ T_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$$

Question 4: Donner l'expression du torseurs $\{T_F\}$ de l'action de serrage dans $\mathfrak{B}_1$ en C

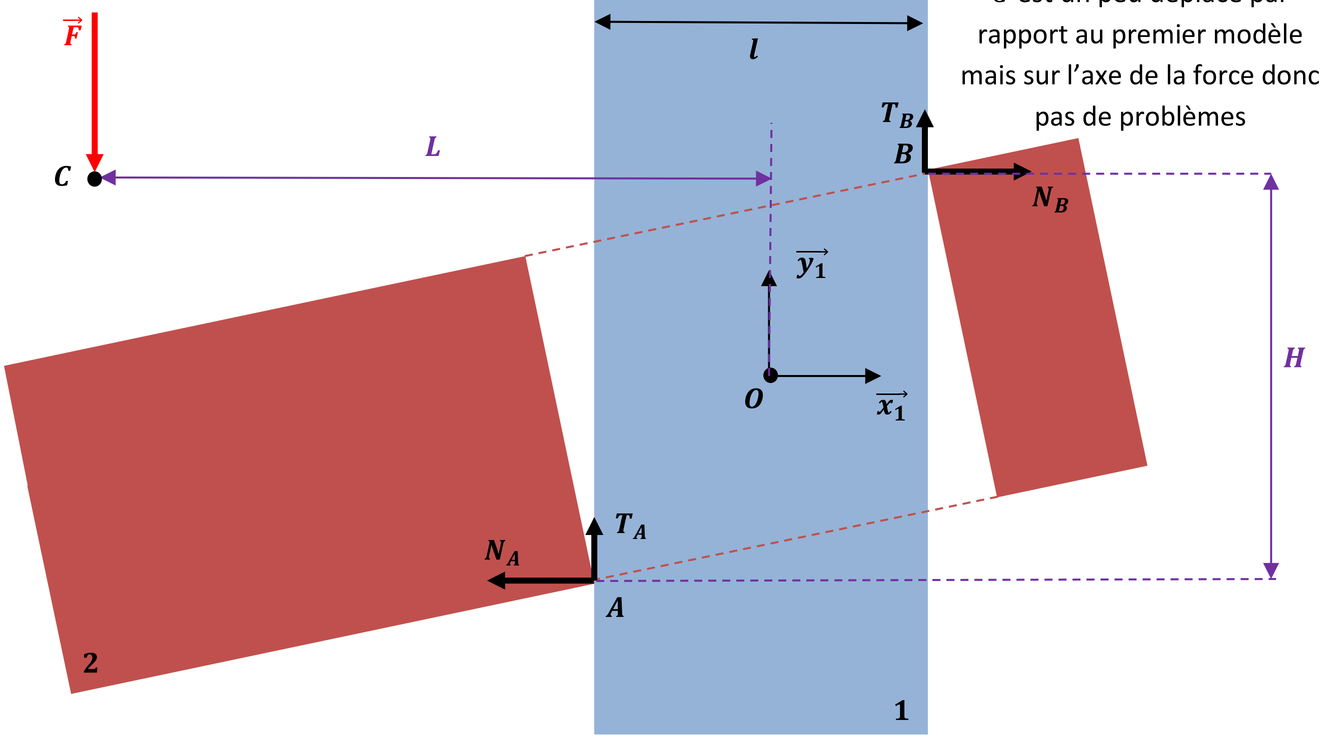
$$\{T_F\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$$

Question 5: Donner la relation liant efforts normaux et tangentiels aux deux contacts à la limite du glissement

$$T_A = fN_A \quad ; \quad T_B = fN_B$$

Question 6: Appliquer le PFS à cette pièce au point O et en déduire un système de 3 équations à résoudre

C est un peu déplacé par rapport au premier modèle mais sur l'axe de la force donc pas de problèmes



$\{\mathcal{T}_A\} = \begin{Bmatrix} -N_A & 0 \\ T_A & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{R_A}) = \overrightarrow{M_A}(\overrightarrow{R_A}) + \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{R_A}$ $= \begin{bmatrix} -\frac{l}{2} \\ -\frac{H}{2} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{bmatrix} -N_A \\ T_A \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{l}{2}T_A - \frac{H}{2}N_A \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$	$\{\mathcal{T}_A\} = \begin{Bmatrix} -N_A\vec{x_1} + T_A\vec{y_1} \\ -\frac{1}{2}(lT_A + HN_A)\vec{z_1} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{T}_B\} = \begin{Bmatrix} N_B & 0 \\ T_B & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_A^{\mathfrak{B}_1}$	$\overrightarrow{M_O}(\overrightarrow{R_B}) = \overrightarrow{M_B}(\overrightarrow{R_B}) + \overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{R_B}$ $= \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{H}{2} \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{bmatrix} N_B \\ T_B \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{l}{2}T_B - \frac{H}{2}N_B \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$	$\{\mathcal{T}_B\} = \begin{Bmatrix} N_B\vec{x_1} + T_B\vec{y_1} \\ \frac{1}{2}(lT_B - HN_B)\vec{z_1} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1}$
$\{\mathcal{T}_F\} = \begin{Bmatrix} 0 & 0 \\ -F & 0 \\ 0 & 0 \end{Bmatrix}_C^{\mathfrak{B}_1}$	$\overrightarrow{M_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{M_C}(\vec{F}) + \overrightarrow{OC} \wedge \vec{F}$ $= \begin{bmatrix} -L \\ \delta \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ -F \\ 0 \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$ $= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ LF \end{bmatrix}^{\mathfrak{B}_1}$	$\{\mathcal{T}_F\} = \begin{Bmatrix} -F\vec{y_1} \\ LF\vec{z_1} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1}$

On applique le PFS à la pièce 2 en équilibre sous les actions $\{T_A\}$, $\{T_B\}$ et $\{T_F\}$:

$$\{T_A\} + \{T_B\} + \{T_F\} = \{0\}$$

$$\begin{Bmatrix} -N_A\overrightarrow{x_1} + T_A\overrightarrow{y_1} \\ -\frac{1}{2}(lT_A + HN_A)\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} N_B\overrightarrow{x_1} + T_B\overrightarrow{y_1} \\ \frac{1}{2}(lT_B - HN_B)\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1} + \begin{Bmatrix} -F\overrightarrow{y_1} \\ LF\overrightarrow{z_1} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_O^{\mathfrak{B}_1}$$

$$\begin{cases} -N_A\overrightarrow{x_1} + T_A\overrightarrow{y_1} + N_B\overrightarrow{x_1} + T_B\overrightarrow{y_1} - F\overrightarrow{y_1} = \vec{0} \\ -\frac{1}{2}(lT_A + HN_A)\overrightarrow{z_1} + \frac{1}{2}(lT_B - HN_B)\overrightarrow{z_1} + LF\overrightarrow{z_1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-N_A + N_B)\overrightarrow{x_1} + (T_A + T_B - F)\overrightarrow{y_1} = \vec{0} \\ \left[\frac{1}{2}(lT_B - HN_B - lT_A - HN_A) + LF\right]\overrightarrow{z_1} = \vec{0} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-N_A + N_B)\overrightarrow{x_1} + (T_A + T_B - F)\overrightarrow{y_1} = \vec{0} \\ \left[\frac{1}{2}\left(l(T_B - T_A) - H(N_B + N_A)\right) + LF\right]\overrightarrow{z_1} = \vec{0} \end{cases}$$

On projette dans la base $\mathfrak{B}_1$:

$$\boxed{\begin{cases} -N_A + N_B = 0 \\ T_A + T_B - F = 0 \\ l(T_B - T_A) - H(N_B + N_A) + 2LF = 0 \end{cases}}$$

Condition d'équilibre à la limite du glissement

Question 7: En utilisant les deux équations en résultante, montrer que $N_A = N_B = N$, $T_A = T_B = T$ et exprimer N et T en fonction de F

$$\begin{cases} -N_A + N_B = 0 \\ T_A + T_B - F = 0 \\ T_A = fN_A \\ T_B = fN_B \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} N_A = N_B = N \\ fN + fN - F = 0 \\ T_A = fN \\ T_B = fN \end{cases} \quad ; \quad \begin{cases} N_A = N_B = N \\ 2fN = F \\ T_A = fN \\ T_B = fN \end{cases}$$

$$\begin{cases} N_A = N_B = N = \dfrac{F}{2f} \\ T_A = T_B = T = fN = \dfrac{F}{2} \end{cases}$$

Question 8: En utilisant l'équation en moment, déterminer la condition d'équilibre imposée par ce système, indépendante de F exprimée sous la forme $L_{lim} = f(H, f)$

$$l(T_B - T_A) - H(N_B + N_A) + 2LF = 0$$
$$l(T - T) - H(N + N) + 2LF = 0$$
$$-2NH + 2LF = 0$$
$$-NH + LF = 0$$

On utilise alors la condition de limite du glissement :

$$-\frac{F}{2f}H + LF = 0$$
$$\frac{H}{2f} = L$$
$$L_{lim} = \frac{H}{2f}$$

Condition d'équilibre générale

Attention : on peut traiter cette partie si on suppose que ça glisse avec le PFD. Si on suppose adhérence, on ne peut simplifier le terme $l(T_B - T_A)$ de l'équation en moment car il existe plusieurs solutions de $T_A + T_B = F$, on a pas $T_A = T_B$ mais $T_A < fN_A$ et $T_B < fN_B$

Question 9: En appliquant le principe fondamental de la dynamique en translation suivant $\overrightarrow{y_1}$, montrer que $2fN < F$

$$\begin{cases} -N_A + N_B = 0 \\ T_A + T_B - F = ma_y < 0 \end{cases} (glissement)$$
$$N_A = N_B = N$$

Glissement

$$T_A = fN_A = fN$$
$$T_B = fN_B = fN$$
$$T_A + T_B - F < 0$$
$$T_A + T_B < F$$
$$2fN < F$$

Question 10: En utilisant l'équation en moment de l'équilibre de la pièce 2 en O, montrer que $HN = LF$

$$l(T_B - T_A) - H(N_B + N_A) + 2LF = 0$$
$$-2HN + 2LF = 0$$
$$HN = LF$$

Question 11: En déduire que la longueur L_{lim} est une longueur minimale L_{min} pour que l'équilibre existe

$$2fN < F \ et \ HN = LF$$
$$2f\frac{LF}{H} < F$$
$$L < \frac{H}{2f}$$
$$L < L_{lim}$$

Il y a donc glissement si la longueur L est inférieure à la longueur L_{lim}, il faut donc que L soit supérieure à L_{lim} pour qu'il n'y ait pas de glissement, c'est-à-dire équilibre (adhérence).
On peut donc appeler cette longueur limite une longueur minimale :

$$L_{lim} = L_{min} = \frac{H}{2f}$$

Bilan

Question 12: En déduire la réponse à la problématique

On remarque que la condition d'équilibre est indépendante de l'effort appliqué.
Il n'y a donc pas de limites, si ce n'est la rupture des matériaux passé un certain effort.

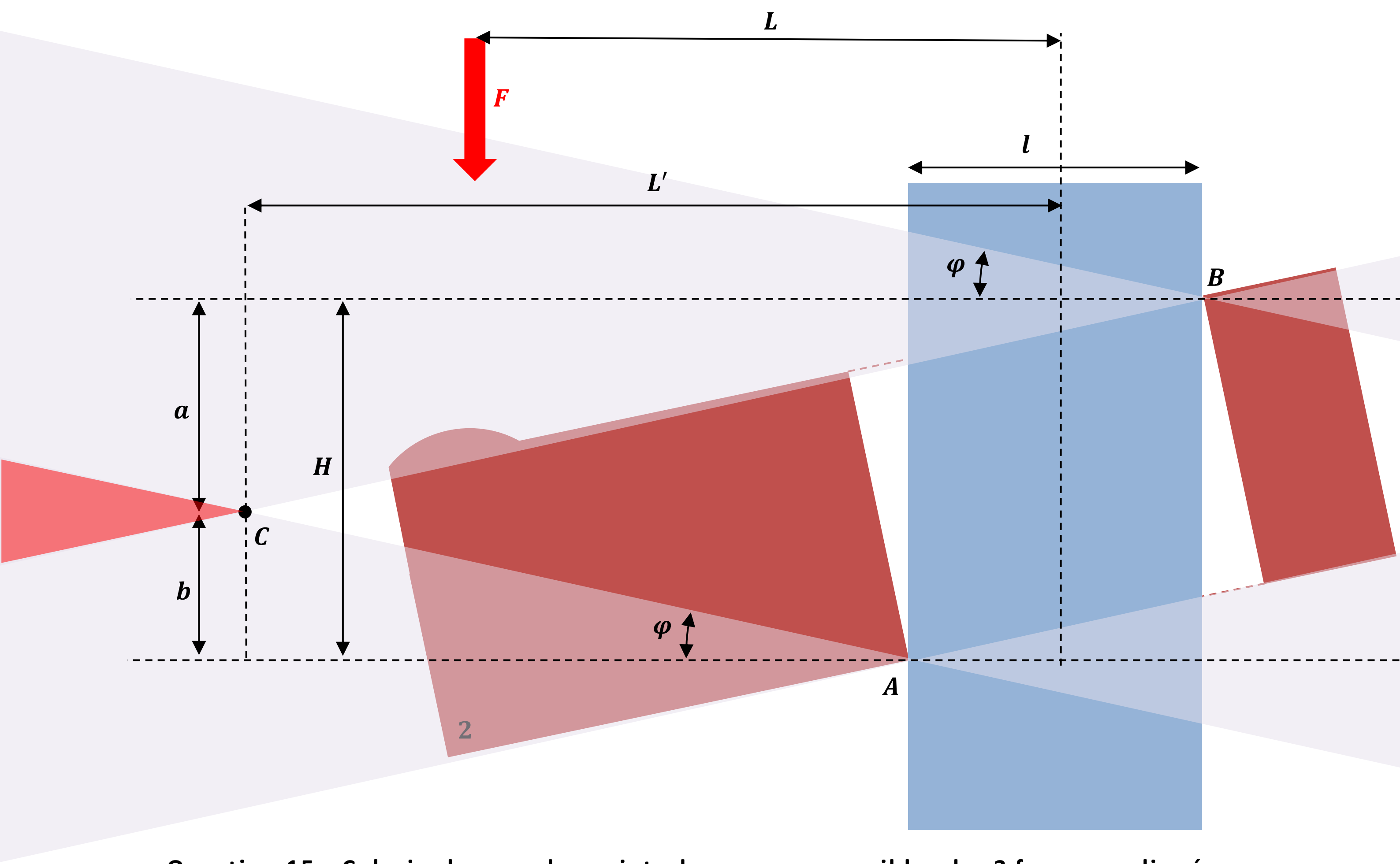
Question 13: Proposer une définition de l'arc-boutement

L'arc-boutement est une situation d'équilibre dépendante de la géométrie, et indépendante de l'effort appliqué.

Question 14: Quelle est la condition entre L et L_{min} traduisant la situation d'arc-boutement

$$L > L_{min} = \frac{H}{2f}$$

Etude graphique



Question 15: Colorier la zone des points de concours possibles des 3 forces appliquées au solide 2 et justifier le fait que L' est une longueur minimum L_{min} permettant l'équilibre

On voit donc que pour avoir équilibre possible, il faut que les 3 actions puissent être concourantes, soit déjà que les actions en A et B puissent l'être.
Il faut donc être soit en C, soit à gauche de C dans la surface intersection des cônes d'adhérence. Dans cette zone d'intersection, on ne peut être à la fois sur chacun des cônes, on ne peut donc pas glisser aux 2 contacts, donc on ne peut pas glisser.
Il faut donc que l'action F soit appliquée à une distance L supérieure à la distance L' qui est donc une valeur minimale de distance d'application de l'effort :

$$L' = L_{min}$$

Question 16: Justifier le fait que le point C corresponde au seul point de concours possible des actions en A, en B et de l'effort F à la limite du glissement, en déduire le rapport entre L_{min} et L_{lim} trouvé précédemment

En C, les deux actions sont sur les cônes, on est alors à la limite du glissement ou en glissement, soit

$$L_{lim} = L_{min}$$

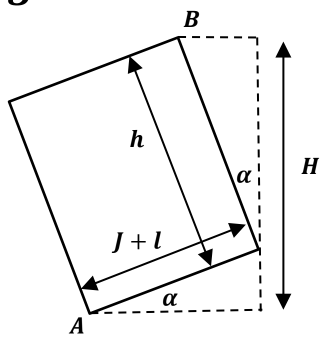
Question 17: Déterminer la condition trouvée à l'aide du PFS à la limite du glissement

$$H = a + b$$
$$\tan\varphi = \frac{a}{L' + \frac{l}{2}} \Rightarrow a = \left(L' + \frac{l}{2}\right)\tan\varphi$$
$$\tan\varphi = \frac{b}{L' - \frac{l}{2}} \Rightarrow b = \left(L' - \frac{l}{2}\right)\tan\varphi$$
$$H = \left(L' + \frac{l}{2}\right)\tan\varphi + \left(L' - \frac{l}{2}\right)\tan\varphi = 2L'\tan\varphi = 2fL'$$

$$L' = L_{lim} = L_{min} = \frac{H}{2f}$$

Discussion sur le jeu dans la liaison glissière

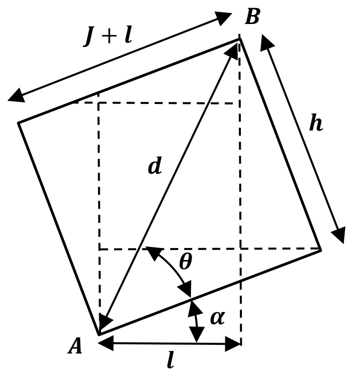
Question 18: Exprimer j en fonction de J, l et α



$$j = (J + l)\cos\alpha - l$$

Expression de L_{min} en fonction des dimensions du guidage

Question 19: Exprimer d en fonction de h, J et l

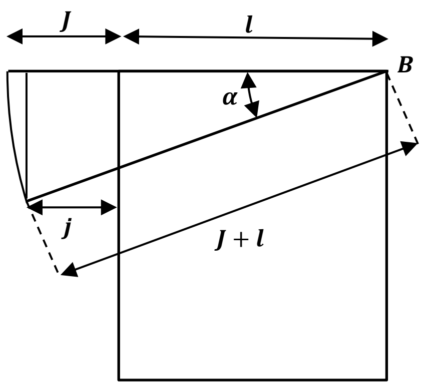


$$d = \sqrt{h^2 + (J + l)^2}$$

Question 20: Exprimer θ en fonction de h et d

$$\sin\theta = \frac{h}{d}$$
$$\theta = sin^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)$$

Question 21: Exprimer α en fonction de l, h et d



$$d\cos(\alpha + \theta) = l$$
$$\cos(\alpha + \theta) = \frac{l}{d}$$
$$\alpha + \theta = \cos^{-1}\left(\frac{l}{d}\right)$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{l}{d}\right) - \theta$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{l}{d}\right) - sin^{-1}\left(\frac{h}{d}\right)$$

Question 22: Exprimer H en fonction de h, J, l et α

$$H = h\cos\alpha + (l+J)\sin\alpha$$

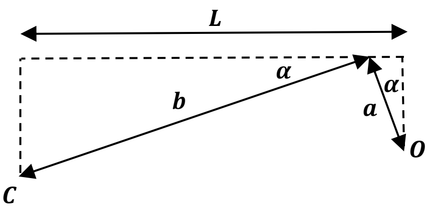
Question 23: En déduire la longueur minimum L_{min} permettant l'équilibre du serre joint en fonction des données géométriques du serre joint h, l et J

$$L_{min} = \frac{H}{2f} = \frac{h\cos\alpha + (l+J)\sin\alpha}{2f}$$

$$L_{min} = \frac{H}{2f} = \frac{h\cos\left(\cos^{-1}\left(\frac{l}{\sqrt{h^2+(J+l)^2}}\right) - sin^{-1}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+(J+l)^2}}\right)\right) + (l+J)\tan\left(\cos^{-1}\left(\frac{l}{\sqrt{h^2+(J+l)^2}}\right) - sin^{-1}\left(\frac{h}{\sqrt{h^2+(J+l)^2}}\right)\right)}{2f}$$

Expression de L en fonction de la géométrie du serre joint

Question 24: Exprimer L en fonction de a, b et α



$$L = a\sin\alpha + b\cos\alpha$$

Application numérique

$$h = 20\,mm \quad ; \quad l = 25\,mm \quad ; \quad a = 30\,mm \quad ; \quad b = 100\,mm$$
$$J = 1\,mm \quad ; \quad f = 0{,}2$$

Question 25: Donner les valeurs numériques de d, α, j, L et H

$$d = \sqrt{h^2 + (J+l)^2} = 32{,}8\,mm$$
$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{l}{d}\right) - sin^{-1}\left(\frac{h}{d}\right) = 0{,}05\,rd = 2{,}78\,°$$
$$j = (J+l)\cos\alpha - l = 0{,}97\,mm$$
$$L = a\sin\alpha + b\cos\alpha = 101{,}34\,mm$$
$$H = h\cos\alpha + (l+J)\sin\alpha = 21{,}24\,mm$$

Question 26: Le serre joint étudié est-il fonctionnel ?

A la limite du glissement, on a :

$$L_{min} = \frac{H}{2f} = 53{,}1\,mm$$
$$L = 101{,}34\,mm$$

Oui, le serre joint est fonctionnel car $L > L_{min}$

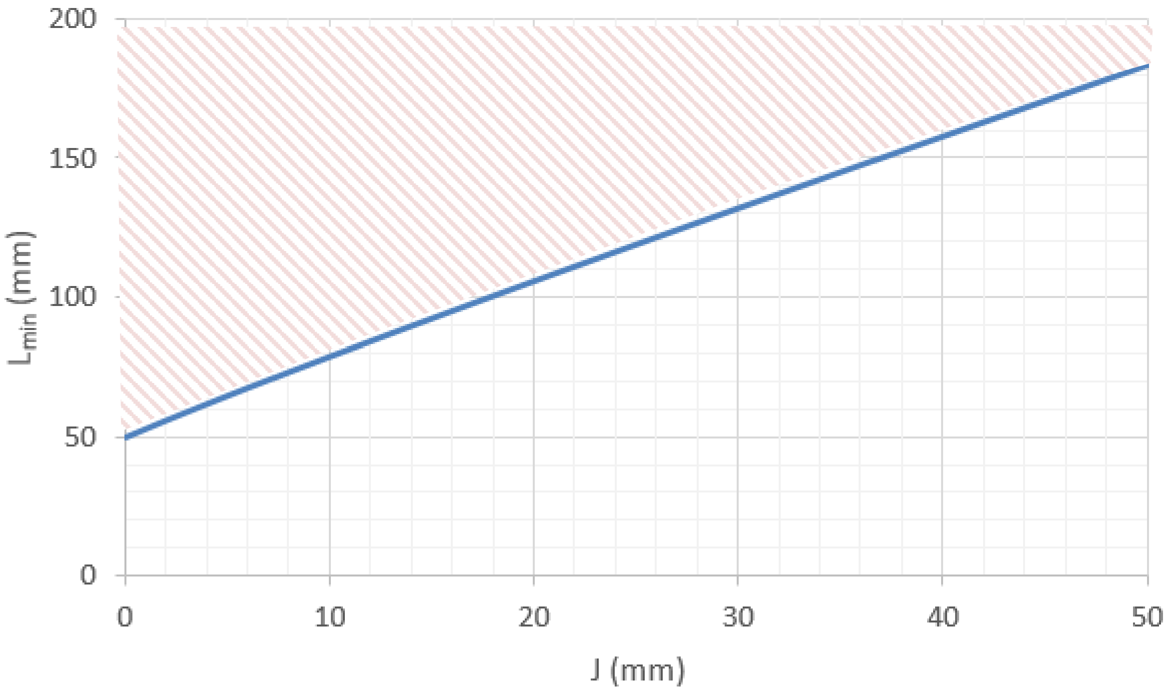
Question 27: Quelle serait la longueur b limite permettant de maintenir la fonction du serre joint ?

$$\frac{H}{2f} = L = a \sin\alpha + b \cos\alpha$$

$$b = \frac{H}{2f\cos\alpha} - a\tan\alpha = 51{,}70\ mm$$

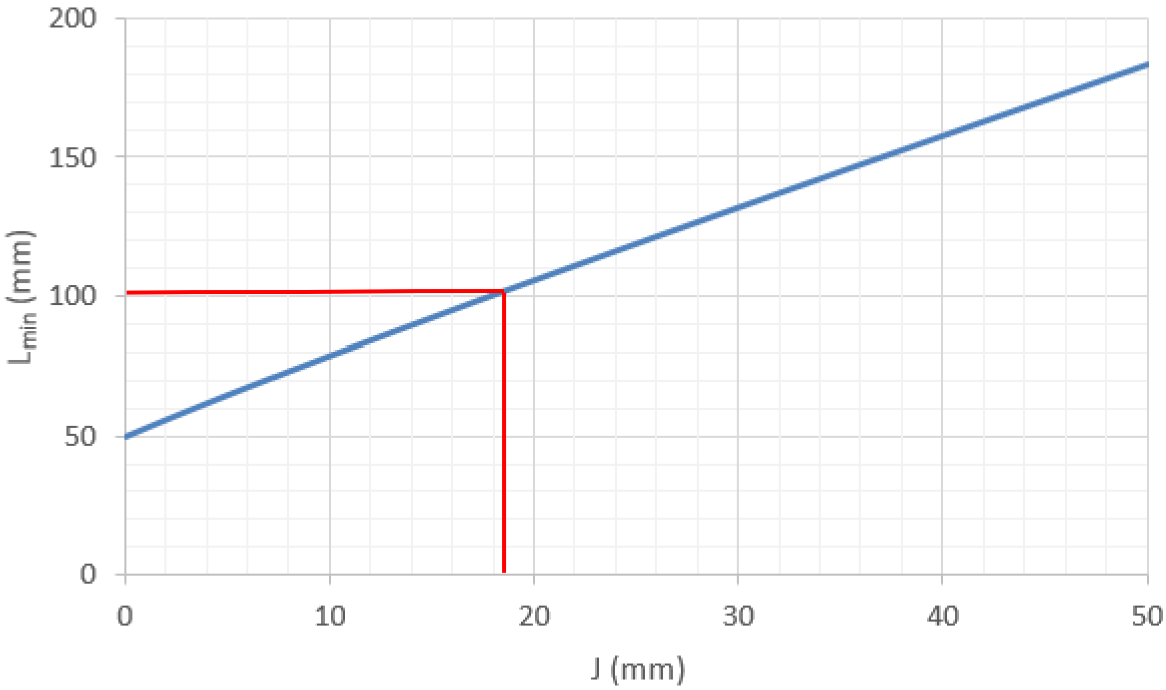
Evolution de L_{min} en fonction du jeu J

Question 28: Mettre en évidence la zone des valeurs de L où le serre joint est fonctionnel sur ce graphique



Question 29: Par lecture graphique, déterminer le jeu dans la glissière à partir duquel le serre joint ne fonctionnera plus

$$L = 101{,}34\ mm$$



On voit que pour un jeu aux alentours de 18,22 mm, le serre joint ne fonctionnera plus.